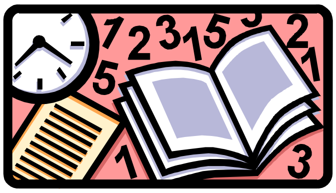
Name:



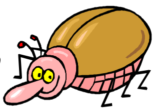
Mathematik-Dossier
Mengen, Zahlen, Diagramme

Inhalt:

- **Mengendarstellung im Venn- und Carroll-Diagramm**
- **Einfache Mengenoperationen (Schnittmenge, Vereinigungsmenge) und ihre sprachliche Umsetzung**
- **Teilmenge**
- **Ordnungsbeziehungen**
- **Grosse Zahlen und Stellenwertsysteme**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden. ***(Die Übungen sind nur als Ergänzung zum Stoff im Buch gedacht!)***

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

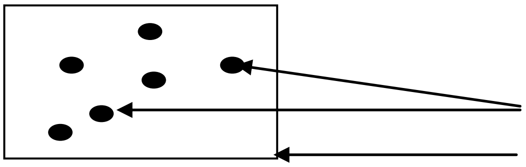
Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Mengen – Definition und ihre grafische Darstellung

Eine Menge ist eine Ansammlung von verschiedenen Dingen („Elementen“), die voneinander unterscheidbar sind.

Einige Beispiele kennen wir auch aus dem normalen Sprachgebrauch, so sagt man: „Es hat eine Menge Menschen am Konzert“ oder „da hat die Mannschaft aber eine Menge Tore erzielt“. Und nicht zu vergessen „wir haben jede Menge Spass gehabt“. In all diesen Formulierungen werden also unterscheidbare Dinge (Menschen, einzelne Tore, Dinge, die Spass machen) in einer Menge zusammengefasst, wie in einem grossen Topf. Der Topf heisst dann Menge und im Topf drin sind verschiedene Elemente.



Elemente („das was in der Menge enthalten ist“)

Menge (fasst unterscheidbare Elemente zusammen)

Damit man überhaupt weiss, von welchen Elementen man spricht, verwendet man eine **Grundmenge**. Diese ist so etwas wie der *„grosse Topf“, in welchem alle Elemente stecken*, die überhaupt in Frage kommen. Zum Beispiel sprechen wir in der Klasse manchmal davon, dass „alle Mädchen“ oder „alle Knaben“ dies oder jenes tun sollen. Damit meinen wir natürlich nicht alle Mädchen der Welt, sondern alle Mädchen der Klasse. Die Unterscheidung in Knaben und Mädchen passiert also innerhalb der Klasse (=Grundmenge). **Die Bezeichnung „alle Mädchen der Klasse“ ist also nichts anderes als die Unterscheidung „In der Grundmenge der Klasse alle Elemente auswählen, die Mädchen sind“.** Die Grundmenge gibt auch an, mit welchen Elementen man die Probleme lösen kann.

Die aufzählende Form:

Um möglichst einfach alle Elemente einer Menge auflisten zu können, verwendet man die *aufzählende Form*:

$$\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$$

Die Elemente in der Menge werden nach Grösse geordnet und mit Komma getrennt angegeben.

Der Name der Menge (mit einem Doppelstrich)

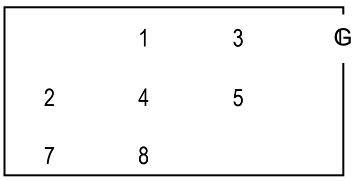
Mengenklammern zeigen den „Behälter“ an

<u>Spezielle Grundmengen:</u>

Menge der natürlichen Zahlen (Menge $\mathbb{N}$)	= {1, 2, 3, 4, 5, 6, ….}	alle ganzen positiven Zahlen
Menge „N Null“ (Menge $\mathbb{N}_0$)	= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}	alle ganzen positiven Zahlen inkl. Null

Darstellung im Venn-Diagramm:

Im Venndiagramm (benannt nach seinem Erfinder Herrn Venn) wird die Grund-mengeals Rechteck dargestellt. Sämtliche **Elemente**, die in der Grundmenge sind, **werden irgendwo in diesem Rechteck eingetragen**.

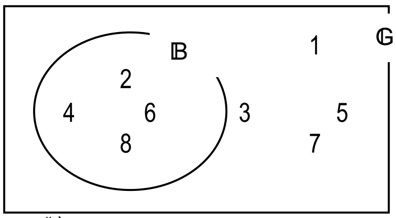


In diesem Fall ist $\mathbb{G}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

Im Venndiagramm wird jetzt auf grafische Art eine Menge dargestellt, deren Elemente besonders hervorgehoben werden sollen. Innerhalb der oben angegebenen Grundmenge $\mathbb{G}$ sollen alle geraden Zahlen zu einer Menge $\mathbb{B}$ zusammengefasst werden.

Es gilt also: $\mathbb{B}$ = {2, 4, 6, 8} = Menge aller geraden Zahlen aus $\mathbb{G}$

Diese Menge wird mittels eines Kreises gebildet. Es gilt nun also, dass **alle Elemente innerhalb des Kreises zur Menge $\mathbb{B}$ gehören**, alle Elemente ausserhalb des Kreises sind nicht in der Menge $\mathbb{B}$ enthalten. Nach wie vor sind aber alle Elemente innerhalb des Rechteckes in der Grundmenge $\mathbb{G}$ enthalten!

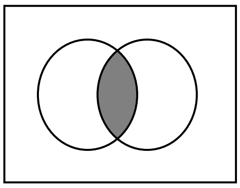


Im Venndiagramm werden Kreise verwendet, um bestimmte Elemente zusammenzufassen und vom Rest zu trennen.

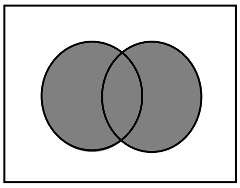
Die Elemente 1, 3, 5, 7, welche alle nicht in $\mathbb{B}$ enthalten sind bilden zusammen die Menge $\overline{\mathbb{B}}$={1, 3, 5, 7}. Diese Menge heisst Ergänzungsmenge von $\mathbb{B}$ (gelesen als „B quer“.)

Alle Elemente, die nicht in der Menge $\mathbb{B}$ enthalten sind, gehören zur Ergänzungsmenge $\overline{\mathbb{B}}$!

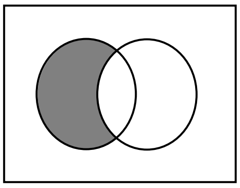
Bereiche im Venndiagramm:



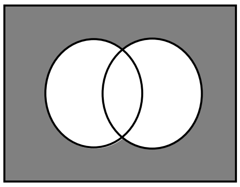
$\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ (Schnittmenge)
$=\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ (B geschnitten mit C)



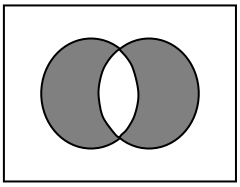
$\mathbb{B}$ oder $\mathbb{C}$ (Vereinigungsmenge)
$= \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$ (B vereinigt mit C)



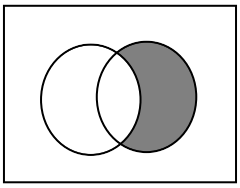
nur $\mathbb{B}$ (Restmenge)
$= \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ ($\mathbb{B}$ ohne $\mathbb{C}$, $\mathbb{B}$ aber nicht $\mathbb{C}$)



weder $\mathbb{B}$ noch $\mathbb{C}$



entweder $\mathbb{B}$ oder $\mathbb{C}$



nur $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ aber nicht $\mathbb{B}$)
$= \mathbb{C} \setminus \mathbb{B}$ ($\mathbb{C}$ ohne $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ aber nicht $\mathbb{B}$)

Die Teilermenge:

Die Teilermenge einer Zahl x enthält sämtliche Zahlen, die Teiler von x sind. (Anders gesagt: Alle Zahlen, durch die man x teilen kann, ohne dass ein Rest entsteht).

So enthält die Teilermenge der Zahl 12 (=T_{12}) die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Denn 12 ist durch jede dieser Zahlen ohne Rest teilbar. Jede Teilermenge enthält zumindest die Zahl 1 und die Zahl x

Weitere Beispiele:

$T_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$ $\quad T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$T_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ $\quad T_{17} = \{1, 17\}$

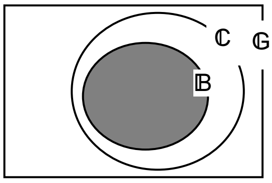
Die Teilmenge:

Eine Teilmenge ist eine spezielle Menge, welche ganz exklusive Elemente enthält.

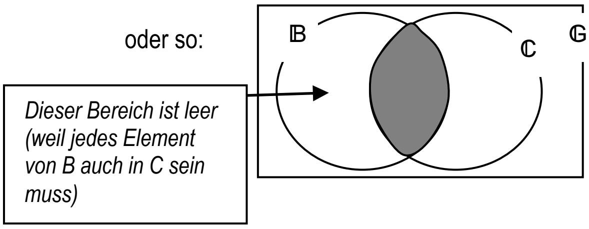
Eine Menge $\mathbb{B}$ heisst Teilmenge einer Menge $\mathbb{C}$, wenn jedes Element von $\mathbb{B}$ auch Element von $\mathbb{C}$ ist.

Das bedeutet also nichts anderes, als dass die Menge $\mathbb{B}$ vollständig in der Menge $\mathbb{C}$ enthalten sein muss.

Im Venndiagramm sieht das so aus:
Alle Elemente von B sind im schraffierten Bereich zu finden.



oder so:



Es gilt der Satz: **Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.**

Beispiele: Es sei $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, $D = \{2, 4, 6, 8\}$ und $T_8 = \{1, 2, 4, 8\}$

So ist $C \subseteq B$ (weil jedes Element von C auch Element ist von B)
$B \not\subset C$ (weil es in B Elemente gibt, die nicht Elemente sind von C)

$T_8 \subseteq B$ $\quad D \subseteq B$ $\quad T_8 \not\subset C$ $\quad T_8 \not\subset D$ $\quad D \not\subset C$ $\quad C \not\subset D$

und auf jeden Fall $\quad \{\} \subseteq B$ $\quad \{\} \subseteq C$ $\quad \{\} \subseteq D$ $\quad \{\} \subseteq T_8$

Vokabular und Sonderzeichen

Die Mengenlehre kennt sehr viele Sonderzeichen und Symbole. Untenstehend sind die wichtigsten Symbole zusammengefasst:

Symbol / Zeichen	*Bedeutung*	*Wird gelesen/gesprochen:*
$\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$		$\mathbb{M}$ ist die Menge mit den Elementen 1, 2, 3, 4
$1 \in \mathbb{M}$	die Zahl 1 gehört zur Menge $\mathbb{M}$	1 **ist Element von $\mathbb{M}$**
$5 \notin \mathbb{M}$	die Zahl 5 gehört nicht zur Menge $\mathbb{M}$	5 **ist nicht Element von $\mathbb{M}$**
$\{\}$	die Menge ist leer / hat keinen Inhalt	leere Menge
$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$	Menge B ist Teilmenge von Menge C	B ist Teilmenge von C
$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{B}$	Menge C ist nicht Teilmenge von B	C ist nicht Teilmenge von C

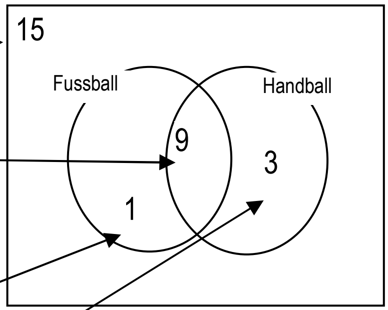
Musteraufgaben zum Bereich „Satzaufgaben mit Venndiagramm“

Beispiel 1:

Von den 28 Schülern einer Klasse spielen 12 Handball, 10 Fussball und 15 keines von beidem.

a) Wieviele Schüler spielen Handball und Fussball?
b) Wieviele Schüler spielen nur Handball (und nicht Fussball)?
c) Wieviele Schüler spielen nicht Fussball?

Der Lösungsweg verläuft über ein Venndiagramm:



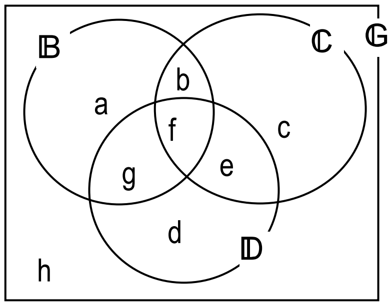
1. Eine Information, die ich mit Sicherheit eintragen kann, ist die, dass 15 Schüler keine der beiden Sportarten ausüben.
2. Als Zweites kann ich feststellen, dass die Summe aller angegebenen Schüler (also 12 + 10 + 15) einem Total von 37 entspricht. Ich weiss aber, dass die Klasse nur 28 Schüler umfasst. Dies bedeutet, dass offenbar ganze 9 Schüler (37 – 28 = 9) zuviel (oder eben doppelt) gezählt wurden. Dies geht dann, wenn sie Handball und Fussball spielen. Ich kann also 9 Schüler in die Schnittmenge von „Handball“ und „Fussball“ schreiben.
3. Nun muss ich noch fertig ausfüllen: Ich weiss, dass in der Menge „Fussball“ insgesamt 10 Schüler stehen müssen. 9 sind bereits in der Schnittmenge, also muss ich in dem Bereich „nur Fussball“ noch 1 (10 – 9) Schüler eintragen.
4. In der Menge „Handball“ müssen total 12 Schüler stehen, 9 sind in der Schnittmenge, ich muss also noch 12 – 9 = 3 dort hin schreiben.
5. Jetzt kann ich die Antworten auf die Fragen finden:
   zu a) Es sind 9 Schüler, die Handball und Fussball spielen
   zu b) Es sind 3 Schüler, die nur Handball spielen
   zu c) Es sind 18 Schüler, die nicht Fussball spielen (das sind alle, die nicht in der Menge „Fussball“ stehen. Also alle Schüler, die nur Handball spielen (=3) und alle, die keines von beidem machen (=15). Die Summe ist 15+3 = 18.

Idee: Je mehr Schüler doppelt gezählt werden (also in der Schnittmenge platziert sind), desto kleiner wird die totale Klassengrösse. Je weniger Schüler doppelt gezählt werden (wenn also möglichst wenige in der Schnittmenge platziert sind), desto grösser wird die Klassengrösse.

Beispiel 2:

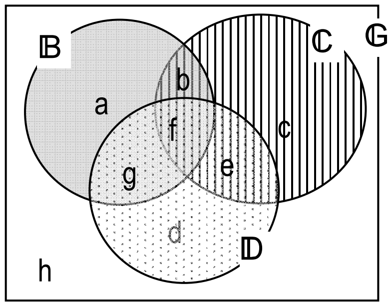
Betrachte das Venndiagramm mit den Mengen $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ in $\mathbb{G}$. Notiere jetzt alle Buchstaben, die

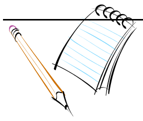
a) zu $\mathbb{B}$ und zu $\mathbb{D}$, aber nicht zu $\mathbb{C}$ gehören



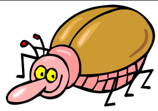
1. Unser Lösungsweg läuft über Teilbereiche. Wir versuchen für jede Teilaufgabe die entsprechenden Mengen zuerst einmal einzufärben.
2. Für Teilaufgabe b) müssen also z.B. alle drei Mengen B, C und D betrachtet (oder in verschiedenen Farben eingefärbt) werden.
   Nun werden die Bedingungen einzeln angeschaut: Die gesuchten Elemente sind also in $\mathbb{B}$ und $\mathbb{D}$ (also überall dort, wo gleichzeitig grau und gepunktet ist), dürfen aber nicht in $\mathbb{C}$ liegen (also nicht dort, wo schraffiert ist). Das bedeutet also, wir suchen die Elemente, die in den Flächen liegen, die nicht schraffiert, dafür aber gepunktet und grau eingefärbt sind.)
   Es sind dies in diesem Fall nur das Element g.
   ➔ Nun werden die entsprechenden Elemente in einer Lösungsmenge angegeben:

   $\mathbb{L}$ = { g }



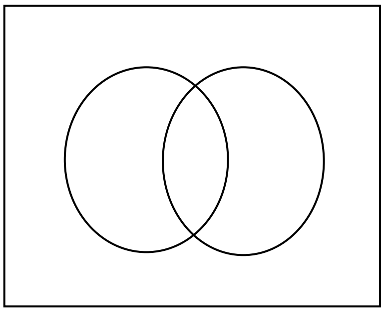


Übungen Mengen / Teilmengen



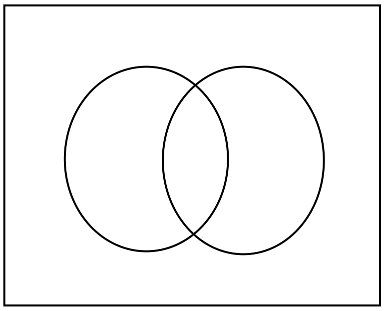
1. Eine Klasse zählt 30 Schüler. Von diesen spielen 10 Klavier, 9 Querflöte und 20 keines von beiden Instrumenten.

a) Wieviele Schüler spielen nicht Querflöte?
b) Wieviel Schüler spielen Klavier und Querflöte?
c) Wieviele Schüler spielen nur Klavier?



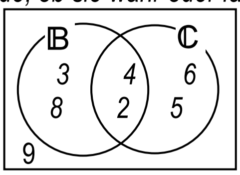
2. In einer Klasse spielen 7 Schüler Handball und 14 Unihockey. 7 spielen nichts von beidem.

a) Wieviele Schüler zählt die Klasse höchstens?
b) Wieviel Schüler zählt die Klasse mindestens?
c) Wieviele Schüler zählt die Klasse, wenn 5 Schüler beide Sportarten spielen?



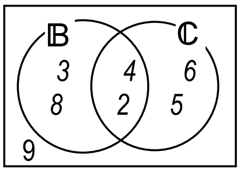
3. Bearbeite die folgenden Aufgaben im Venndiagramm

Betrachte das untenstehende Venn-Diagramm:
Beurteile jetzt die folgenden Aussagen und entscheide, ob sie wahr oder falsch sind.



a) $5 \in \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
b) $8 \in \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
c) $4 \notin \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
d) $9 \in \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
e) $6 \notin \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
f) $6 \in \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
g) $5 \in \mathbb{C}$	O wahr	O falsch

Betrachte das untenstehende Venn-Diagramm:
Bestimme, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:



h) $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
i) $\{\,\} \subseteq \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
j) $\{2, 4, 6\} \subseteq \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
k) $\{3, 8, 9\} \not\subset \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
l) $\{\,\} \not\subset \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
m) $\{2\} = \{0, 2\}$	O wahr	O falsch
n) $\{\,\} \not\subset \mathbb{B}$	O wahr	O falsch

4. Beurteile die folgenden Aussagen:

Gegeben sind die Mengen: $\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathbb{B} = \{1, 3, 5\}$; $\mathbb{C} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathbb{D} = \{2, 4, 6\}$ und $\mathbb{E} = \{2, 4\}$

a) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
b) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{D}$	O wahr	O falsch
c) $\overline{\mathbb{B}} \subseteq \mathbb{E}$	O wahr	O falsch
d) $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$	O wahr	O falsch
e) $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{E}$	O wahr	O falsch
f) $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \mathbb{E}$	O wahr	O falsch
g) $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{G}$	O wahr	O falsch

h) $\mathbb{E} \not\subset \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
i) $\mathbb{E} \not\subset \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
j) $\{2, 4, 6\} \not\subset \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
k) $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{B}$	O wahr	O falsch
l) $\{\,\} \not\subset \mathbb{C}$	O wahr	O falsch
m) $\{2\} = \mathbb{E}$	O wahr	O falsch
n) $\{2\} \not\subset \mathbb{B}$	O wahr	O falsch

5. Bilde die Teilermenge von

a) 36 T_{36} =

b) 51 T_{51} =

c) 38 T_{38} =

d) 11 T_{11} =

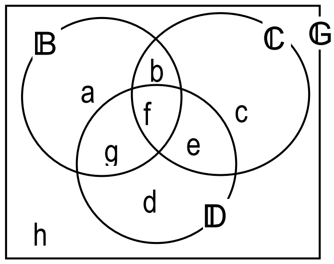
e) 81 T_{81} =

6. Bestimme im nebenstehenden Venndiagramm alle Elemente, die …

a) nicht in B liegen

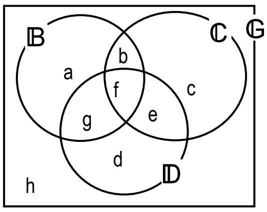
b) In B oder in C, aber nicht in D liegen

c) Weder in C, noch in B liegen.

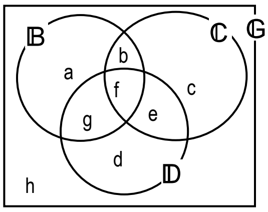


Verwende zur Verdeutlichung die „Hilfs-Venndiagramme“

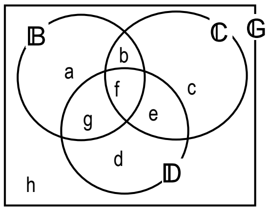
a)



b)



c)



$\mathbb{L}$=

$\mathbb{L}$=

$\mathbb{L}$=

7. Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$\mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$ $\mathbb{D} = \{3, 12\}$ $\mathbb{G} = \{12, 3, 3, 12\}$

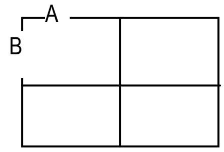
$\mathbb{C} = \{1, 3, 1\}$ $\mathbb{E} = \{1, 1, 2\}$ $\mathbb{M} = \{13\}$

Bemerkungen / Kommentare:

2. Darstellung im Carroll-Diagramm

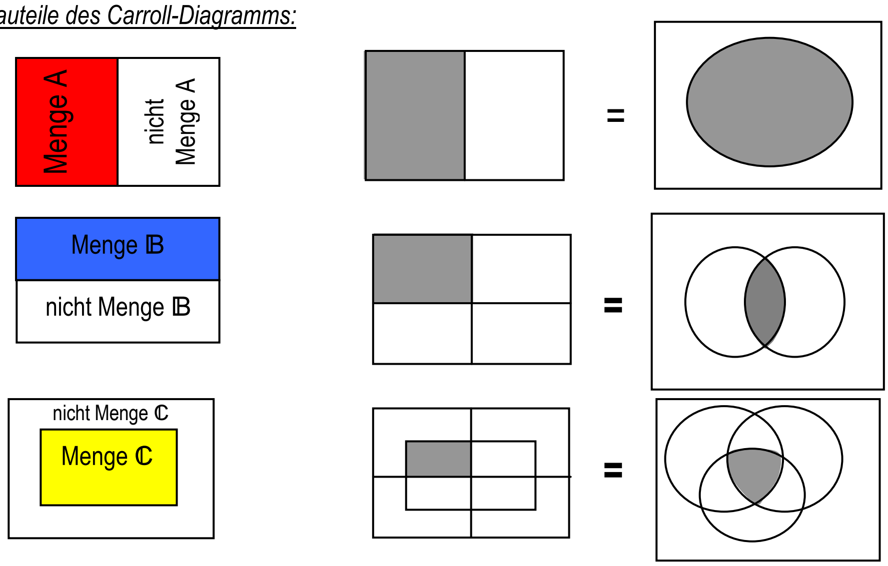
Neben dem Venndiagramm ist als Darstellungsart für Mengen auch das Carroll-Diagramm in Gebrauch. Anstelle von Kreisen nützt das Carroll-Diagramm Rechtecke. Dabei ist die Grundmenge das ganze Rechteck. Durch vertikale Teilung wird eine erste Unterteilung vorgenommen. So gibt es eine Hälfte des Rechteckes, das die Menge A darstellt, die andere Hälfte entspricht dabei „Nicht A“ oder die Ergänzungsmenge zu A. Durch eine horizontale Teilung erfolgt die nächste Unterscheidung in „Menge B“ oder „Nicht B“.
Nach zwei solcher Unterteilungen hat man also vier Möglichkeiten:

Ein Element gehört zu A und zu B (links oben)
Ein Element gehört zu A, aber nicht zu B (links unten)
Ein Element gehört nicht zu A, aber zu B (rechts oben)
Ein Element gehört nicht zu A und nicht zu B (rechts unten).

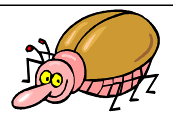


Durch ein kleines Rechteck innerhalb der „Grundmenge“ wird eine dritte Menge C eingeführt. Jeder Platz hat somit wieder zusätzliche Bedeutung.

Bauteile des Carroll-Diagramms:

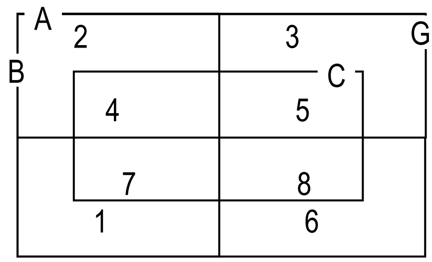


Übungen Carroll-Diagramm



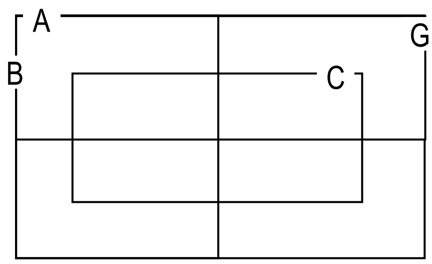
1. Betrachte das nebenstehende Carroll-Diagramm. Beurteile die folgenden Aussagen (wahr / falsch)

		wahr	falsch
a)	$1 \in A$	☐	☐
b)	$3 \in B$	☐	☐
c)	$3 \in B$ und $3 \in C$	☐	☐
d)	$5 \in C$	☐	☐
e)	$5 \notin G$	☐	☐
f)	$4 \in A$ und $4 \notin B$	☐	☐
g)	$2 \notin C$ oder $2 \in B$	☐	☐
h)	$7 \in A$ und $7 \notin B$ und $7 \in C$	☐	☐
i)	$7 \in A$ und $8 \notin B$	☐	☐
j)	$6 \notin C$	☐	☐



2. Über die Elemente der Grundmenge G = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} hast du untenstehende Angaben. Fülle die Elemente korrekt ins Carroll-Diagramm ein.

A = {1, 2, 3, 4, 5}
B = {2, 4, 6, 8}
C = {1, 3, 4, 5}

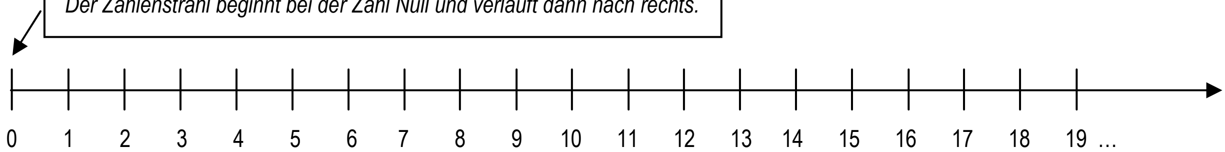


3. Ordnungsbeziehungen

Damit man im Zahlen-Dschungel Ordnung halten kann, werden Zahlen nach ihrer Grösse geordnet. Die Darstellung dieser Zahlen erfolgt auf dem Zahlenstrahl. So kann die Lage einer Zahl eindeutig festgelegt werden. Die Ordnung ist so immer hergestellt.

Der Zahlenstrahl sieht so aus:

Der Zahlenstrahl beginnt bei der Zahl Null und verläuft dann nach rechts.



Je weiter rechts eine Zahl steht, desto grösser ist sie.

Die Ordnungszeichen:

In der Mathematik wird für jede logische Zuordnung oder Operation ein Zeichen verwendet, das eindeutig ist. Auch im Bereich Ordnungsbeziehungen wird so gearbeitet. Die folgenden Zeichen werden verwendet:

Zeichen	*lesen als:*	*Bedeutung*
=	gleich	ist gleichwertig
>	grösser als	ist grösser als
<	kleiner als	ist kleiner als
≥	grössergleich	ist mindestens so gross wie (ist grösser oder gleich)
≤	kleinergleich	ist höchstens so gross wie (ist kleiner oder gleich)

Diese Zeichen werden immer von links her gelesen!

Umsetzung von Sprache in Formeln (Übersetzen in formale Sprache):

Die Umsetzung von „gesprochenen“ Sätzen in Formeln ist nicht ganz so schwer. Die Lösungsbereiche haben dabei mit den Ordnungszeichen zu tun, denn nur gerade das Zeichen „gleich“ (=) liefert einen einzigen Punkt, alle anderen Zeichen liefern uns Zahlenbereiche.

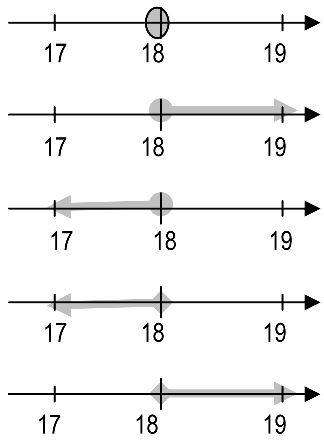
a) Wir erwarten dich um 18 Uhr → Ankunft = 18 Uhr →

b) ... dich frühestens um 18 Uhr → Ankunft ≥ 18 Uhr →

c) ... dich spätestens um 18 Uhr → Ankunft ≤ 18 Uhr →

... dich vor 18 Uhr → Ankunft < 18 Uhr →

... dich nach 18 Uhr → Ankunft > 18 Uhr →



Signatur: ☐ Grenze gehört NICHT dazu
◯ Grenze gehört dazu

Bemerkungen / Kommentare:

Musteraufgaben zum Bereich „Ordnungsbeziehungen“

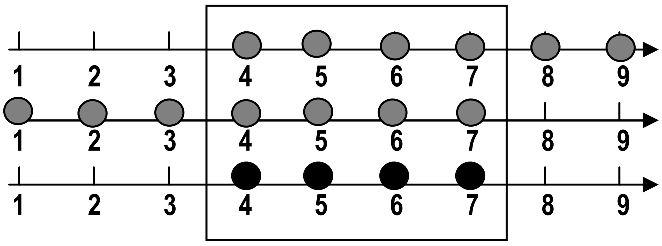
Beispiel 1:

Notiere die gesuchte Menge M aller x aus G = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } für die gilt:

a) 3 ist kleiner als x und x ist kleiner als 8

1. Schritt: In formale Sprache übersetzen: (und immer von x aus lesen / schreiben):
   $x > 3$ und $x < 8$
2. Schritt: Die einzelnen Bedingungen einzeln einzeichnen: $x > 3$

   $x < 8$

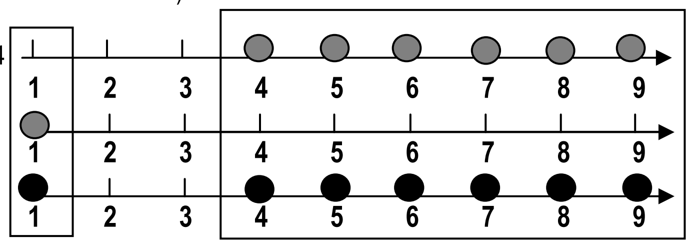


3. Schritt: Die Verknüpfung „**und**“ bedeutet: Beides muss gleichzeitig erfüllt sein. Also ist Lösung: $3 < x < 8$
4. Schritt: Lösungsmenge angeben: <u>**$\mathbb{L}$ = { 4, 5, 6, 7 }**</u>

b) x ist mindestens gleich 4 oder kleiner als 2

1. Schritt: In formale Sprache übersetzen: (und immer von x aus lesen / schreiben):
   $x \geq 4$ oder $x < 2$
2. Schritt: Die einzelnen Bedingungen einzeln einzeichnen $x \geq 4$

   $x < 2$

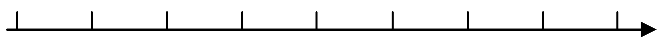


3. Schritt: Die Verknüpfung „**oder**“ bedeutet: Die erste Bedingung, die zweite Bedingung oder beide müssen erfüllt sein.
4. Schritt: Lösungsmenge angeben: <u>**$\mathbb{L}$ = { 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }**</u>

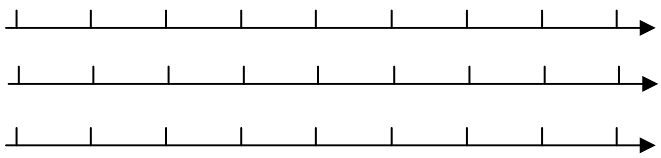
Übungen Ordnungsbeziehungen

1. Notiere die Menge M aller Elemente x aus G = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} für die gilt:

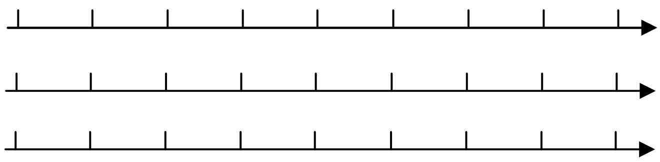
a) x ist kleiner als 7



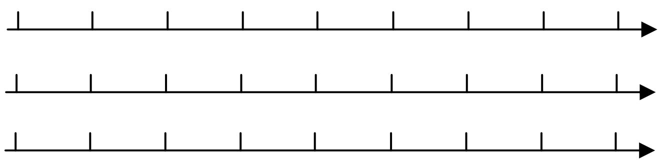
b) x ist kleiner als 7 und 3 ist kleiner oder gleich x



c) 4 ist grösser als x oder x ist mindestens gleich 6



d) Entweder ist x grösser als 7 oder x ist höchstens gleich 4



4. Grosse Zahlen und Stellenwertsysteme

a) Potenzschreibweise im 10er-System (Dezimalsystem)

Alle Zahlen, die ein Vielfaches von 10 sind, lassen sich als Zehnerpotenzen schreiben. Das funktioniert so:

$1000 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{3 mal die Zahl 10 mit sich selber multiplizieren}} = \mathbf{10^3}$

3 ist der Exponent (Hochzahl)

10 ist die Basis (Basiszahl)

Bei Zehnerpotenzen beschreibt der Exponent, wie viele Nullen die Zahl hat.

Es gilt:	$10^0 = 1$	(Definition, eine 1 mit 0 Nullen…)
	$10^1 = 10$	(eine 1 mit 1 Null)
	$10^2 = 100$	(eine 1 mit 2 Nullen)
	$10^3 = 1000$	(eine 1 mit 3 Nullen)
	$10^6 = 1$ Mio	(eine 1 mit 6 Nullen)
	$10^9 = 1$ Mia	(eine 1 mit 9 Nullen)
	$10^{12} = 1$ Billion	(eine 1 mit 12 Nullen)
	$10^{18} = 1$ Trillion	(eine 1 mit 18 Nullen)
	usw.	

Die Zehnerpotenzen können natürlich für jede beliebige Zahl verwendet werden:

$6000 = 6 \cdot 1000 = 6 \cdot 10^3$ 6 Millionen $= 6 \cdot 1$ Million $= 6 \cdot 10^6$

Die Zahl 345000 ist somit $345 \cdot 1000 = 345 \cdot 10^3$

Nun ist es für Zahlen übersichtlicher, wenn sie mit einem möglichst **kleinen Zahlteil** und einem möglichst **grossen Exponenten** geschrieben werden können. Man arbeitet dabei mit Kommastellen. Es gilt dabei

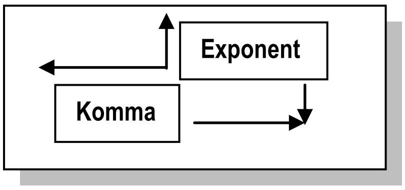
$345000 = 345 \cdot 1000 = 345 \cdot 10^3 = 34{,}5 \cdot 10^4 = 3{,}45 \cdot 10^5$

Das Verschieben des Komma nach links hat somit pro Stelle einen zunehmen grösseren Exponenten zur Folge und umgekehrt.

$345000 = 345 \cdot 10^3 = 34{,}5 \cdot 10^4 = 3{,}45 \cdot 10^5$

Komma 1 Stelle nach links ➔ Exponent + 1

Komma 1 Stelle nach links ➔ Exponent + 1



b) Der Aufbau des Dezimalsystems (10er-System)

Unser Zehnersystem kennt Zahlen, die aus 10 verschiedenen Ziffern zusammengesetzt sind. Die Ziffern, die wir dabei verwenden sind die 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

> 10 Ziffern → Unendlich viele Zahlen
>
> Dies funktioniert, weil j**ede Zahl einen Eigenwert und einen Stellenwert hat.** Denn je nachdem, wo eine Ziffer in der Zahl steht, hat die Zahl einen eigenen Wert.

Unser Dezimalsystem ist demnach ein Stellenwertsystem. Betrachten wir dies etwas genauer:

Wenn wir einem kleinen Kind erklären müssen, aus welchen Bausteinen eine Zahl wie z.B. 1256 besteht, so werden wir ihm wohl sagen: „**Die Zahl besteht aus 6 Einer-Würfelchen, 5 Zehnerstäbchen, 2 Hunderterplatten und 1 Tausenderblock.**" So kann er diese Zahl mit verschiedenen Bausteinen zusammensetzen. **Dabei ist schon alles gesagt, wir haben den Eigenwert (Anzahl, wieviele von welcher Sorte) und den Stellenwert (Sorte, Grösse) mitgeteilt.**

Beispiel einer Zahl im 10er-System (Dezimalsystem):

Basiszahl (des Dezimalsystemes): **10**
Ziffern: **0 bis 9** (Total 10 Ziffern)

10'000er	*1'000er*	*100er*	*10er*	*1er*
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
4	**5**	**3**	**7**	**9**

Eigenwert:	9 (Anzahl dieser Sorte)
Stellenwert:	Einer (Sorte)

Eigenwert:	7
Stellenwert:	Zehner (10^1-er)

Eigenwert:	3
Stellenwert:	Hunderter (10^2-er)

Eigenwert:	5
Stellenwert:	Tausender (10^3-er)

Eigenwert:	4
Stellenwert:	Zehntausender (10^4-er)

Unsere Zahl setzt sich also aus 9 Einer, 7 Zehner, 3 Hunderter, 5 Tausender und 4 Zehntausender zusammen. Man kann sie entsprechend auch so schreiben:

45379 = 4 • 10'000 + 5 • 1000 + 3 • 100 + 7 • 10 + 9 • 1

oder mit 10er-Potenzen:

$$\mathbf{45379 = 4 \bullet 10^4 + 5 \bullet 10^3 + 3 \bullet 10^2 + 7 \bullet 10^1 + 9 \bullet 10^0}$$

c) Der Aufbau von weiteren Stellenwertsystemen:

Alle anderen Stellenwertsysteme sind genau gleich aufgebaut, wie das 10er-System. Hast du das oben verstanden, ist der Rest kein Problem mehr und du kannst mit allen anderen Stellenwertsystemen gut umgehen. Entscheidend für die Berechnungen und Wert-Bestimmung ist auf jeden Fall die Basiszahl:

Basiszahl:

- Sie sagt uns, wie viele Ziffern das System hat.
- Sie ermöglicht und, die Stellenwerte im Zahlsystem zu bestimmen.

Name des Stellenwertsystems	Anzahl Ziffern	mögliche Ziffern	Stellenwerte …	 *fünftletzte Stelle*	 *viertletzte Stelle*	 *drittletzte Stelle*	 *zweitletzte Stelle*	 *letzte Stelle*
10er-System	10	0 bis 9	…	10'000er $= 10^4$	1000er $= 10^3$	100er $= 10^2$	10er $= 10^1$	1er $= 10^0$
2er-System	2	0, 1	…	16er $= 2^4$	8er $= 2^3$	4er $= 2^2$	2er $= 2^1$	1er $= 2^0$
4er-System	4	0, 1, 2, 3	…	256er $= 4^4$	64er $= 4^3$	16er $= 4^2$	4er $= 4^1$	1er $= 4^0$
5er-System	5	0, 1, 2, 3, 4	…	625er $= 5^4$	125er $= 5^3$	25er $= 5^2$	5er $= 5^1$	1er $= 5^0$
6er-System	6	0, 1, 2, 3, 4, 5	…	1296er $= 6^4$	216er $= 6^3$	36er $= 6^2$	6er $= 6^1$	1er $= 6^0$
8er-System	8	0 bis 7	…	4096er $= 8^4$	512er $= 8^3$	64er $= 8^2$	8er $= 8^1$	1er $= 8^0$

Dabei ist wichtig, zurückzudenken, wie die Potenzen definiert waren: So bedeutet 4^3, dass die Zahl 4 dreimal mit sich selber multipliziert werden muss, also $4 \bullet 4 \bullet 4 = 16 \bullet 4 = 64$. Und 6^4 heisst $6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 = 36 \bullet 6 \bullet 6 = 216 \bullet 6 = 1296$.

d) Lesen und Schreiben von Zahlen in fremden Stellenwertsystemen:

Um deutlich zu machen, in welchem Stellenwertsystem eine Zahl geschrieben ist, notieren wird die S**ystemzahl (Basiszahl) in einem tiefergestellten Kreislein rechts von der Zahl.** Im Zehnersystem dürfen wird diese Systemangabe weglassen (dies ist eine Abmachung, eine sinnvolle Vereinfachung, denn wir bewegen uns normalerweise ja im 10er-System).

Zahlen, die nicht im Zehnersystem geschrieben sind, können wir nur ziffernweise lesen, denn in diesen Systemen kommen ja keine Zehner, Hunderter oder Tausender etc. vor.

Wir schreiben	*Wir lesen:*
4103_{5}	Vier, Eins, Null, Drei im Fünfersystem
2514_{8}	Zwei, Fünf, Eins, Vier im Achtersystem

Angabe der Basiszahl (im Zehnersystem weglassen!)

e) Umrechnen von Zahlen von fremden Stellenwertsystemen ins Zehnersystem:

Zu jeder Zahl, die in einem fremden Stellenwertsystem geschrieben ist, können wir mittels Stellen- und Eigenwerten die entsprechende (gleichwertige) Zahl im Zehnersystem berechnen:

2103_{4}	$= 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$	Jede Ziffer wird mit Eigen- und Stellenwert bestimmt
	$= 2 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1$	Die Stellenwerte werden ausgerechnet
	$= 128 + 16 + 0 + 3$	ab hier sind wir im Zehnersystem und können addieren
	= 147	**Dies entspricht der gleichwertigen Zahl im 10er-System.**

f) Umrechnen von Zahlen aus dem Zehnersystem in fremde Stellenwertsysteme:

Um die Zahlen aus dem Zehnersystem in ein anderes Stellenwertsystem umzurechnen, gibt es zwei Methoden. Die eine ist mehr „experimentell", die andere ist sehr mathematisch. Beginnen wir mit der eher „exprimentellen" Methode:

<u>Mit Stellen und Eigenwerten:</u>
Die Zahl 99 soll ins 6er-System übertragen werden.

1. Stellenwerte bestimmen:	Im Sechsersystem gibt es 1er, 6er, 36er, 216er usw.
2. Grösstmögliche Stellenwerte auffüllen	Die grössten hier brauchbaren Stellenwerte sind 36er. In 99 haben genau **2** 36er Platz. Es bleiben 99 - 2•36 = 27.
3. Weitere Stellenwerte auffüllen	In 27 sind **4** 6er enthalten. Es bleiben 27 - 4•6 = 3. Dies sind **3** Einer.

➔ **Somit gilt: 99 = 243_{6}**

<u>Mit einem Algorithmus (Dies ist eine feste Abfolge von Rechenschritten, die aus einer „Eingabe" ein Resultat liefern).</u>

99 soll ins 6er-System übertragen werden.

99	:	6	= 16	Rest 3
16	:	6	= 2	Rest 4
2	:	6	= 0	Rest 2

Taucht hier eine 0 auf, bedeutet dies „STOPP". Der Algorithmus ist zu Ende.

Jetzt werden die Rest-Angaben von **unten nach oben gelesen** und ergeben die gesuchte Zahl:

= 243_{6}

Übungen Grosse Zahlen und Stellenwertsysteme

1. Nenne zu den untenstehenden Zahlen jeweils die

die um 6 grössere Zahl		*die um 7 kleinere Zahl*	
a) 1’963’995		e) 16’548’874	
b) 99’994		f) 99’999’992	
c) 16’987’987		g) 646’879’632	
d) 9’909’899		h) 164’846	

2. Bestimme die Anzahl der Nullen:

a) 100 Millionen

b) 700'000 Trillionen

c) 39 Billionen

d) 80000 Milliarden

3. Schreibe die folgenden Zahlen als Potenz mit der Basis 10 (also als Zehnerpotenz)

Bsp.: 10’000 **= *10^4***

a) 100’000

b) 1’000

c) 10’000’000’000’000

d) 100’000'000'000'000’000

e) 1

4. Schreibe die Zahl als Produkt einer möglichst kleinen Zahl mit einer Zehnerpotenz.

Bsp.: 1'230'000’000 *$123 \bullet 10^7$* ***$= 1,23 \bullet 10^9$***

a) 25’987’000

b) 268’000’000

c) 23'400'000’000

d) 763.5 Milliarden

e) 79,26 Millionen

5. Schreibe die Zahl ohne die Zehnerpotenzen

Bsp.: $35 \bullet 10^6$ *=35 • 1'000'000 =* ***35’000’000***

a) $8 \bullet 10^6$

b) $98 \bullet 10^7$

c) $15 \bullet 10^3$

d) $1,23 \bullet 10^5$

e) $45 \bullet 10^7$

6. Bestimme bei der nachfolgenden Zahl den Stellenwert und die Eigenwerte der einzelnen Ziffern:

	Eigenwert:	*Stellenwert:*
a) 15789		

7. **Schreibe die Zahl als Summe mit Hilfe von Eigenwert und Stellenwert:**

Bsp.:	*34135*₍₆₎	$=3 \bullet 6^4 + 4 \bullet 6^3 + 1 \bullet 6^2 + 3 \bullet 6^1 + 5 \bullet 6^0$
a)	*12232*(4)	
b)	*175*(8)	
c)	*11110010*(2)	
d)	*2641645*(7)	

8. **Übersetze die folgenden Zahlen ins Zehnersystem:**

Bsp.:	*510*(6)	$=5 \bullet 6^2 + 1 \bullet 6^1 + 0 \bullet 6^0 = 5 \bullet 36 + 1 \bullet 6 + 0 = 180 + 6 = 186$
a)	*232*(5)	
b)	*1032*(4)	
c)	*10010*(2)	
d)	*120211*(3)	

9. **Übersetze die folgenden Zahlen aus dem Zehnersystem in die entsprechenden Systeme: (Ausrechnungen unten!)**

Bsp.:	*591 ins 6er Sysetm*	*591 : 6 = 98*	*Rest 3*	
		98 : 6 = 16	*Rest 2*	**= *2423*(6)**
		16 : 6 = 2	*Rest 4*	
		2 : 6 = 0	*Rest 2*	
a)	*453 ins 4er-System*			
b)	*1531 ins 8er - System*			
c)	*25 ins 2er-System*			
d)	*182 ins 3er-System*			